LA2 Blatt 1 17.04.14

A1| „⇒": Ist $W_1 = W_2$ so sieht man leicht: $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = 0$

„⇐": „⊆": $w_1 \in W_1$, $w_1 = w_1 + 0 = w_2 + u_2$ eindeutig ⇒

$0 = \psi(0) = \psi(\phi(w_1)) = \phi \circ \psi(w_1) = \phi \circ \psi(w_2 + u_2) = \phi(w_2) = \phi(w_1 - u_2) = -u_2$

$\Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 \in W_2$

„⊇": analog.

A2| a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) Allg. Lösung lautet: $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{F}_7$ ⇒ 7 versch. Lsg.

A3| a) In der ang. Reihenfolge: $B = \{b_0, \dots, b_3\}$, $C = \{c_0, \dots, c_3\}$ ⇒

$c_0 = (T)^3 = b_3$, $c_1 = b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0$, $c_2 = b_3 - 6b_2 + 12b_1 - 8b_0$

$c_3 = b_3 - 9b_2 + 27b_1 - 27b_0$ ⇝ Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -27 & 27 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ hat vollen Rang ⇒ C Basis.

b) $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$, $c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$ $\Rightarrow D = \sum_{i=0}^{3} D(b_i) b_i^*$, $D(b_0) = 0$, $D(b_1) = 1$

$D(b_2) = -2$, $D(b_3) = 3$ $\Rightarrow D = b_1^* - 2b_2^* + 3b_3^*$. Analog:

$D(c_0) = 3$, $D(c_1) = 12$, $D(c_2) = 27$, $D(c_3) = 48$ ⇒ $D = \dots$

A4| Matrix hat Eigenwerte 0, −1. (1,1,2) ist ein EV zu 0, (2,0,1) und (−2,1,0) sind EV zu −1. ⇒ Diag'bar, d.h.

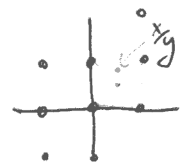
$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

LA2 Blatt 2 24.04.14

A1) a), c) einfach mit eind. Primfaktorzerlegung.

b) $Ra \cap Rb = (d)$ da R HIR. $\Rightarrow d \in (a), d \in (b) \Rightarrow a | d, b | d$
$\Rightarrow \mathrm{kgV}(a,b) | d \Rightarrow (d) \subseteq (\mathrm{kgV}(a,b))$. Nun ist aber ebenso
$\mathrm{kgV}(a,b) \in (a)$ und $\in (b) \Rightarrow (\mathrm{kgV}(a,b)) \subseteq (a) \cap (b) \Rightarrow$ gleich.

A2) a) $R \subseteq \mathbb{C}$ und N ist $|\cdot|^2$ auf $\mathbb{C}$. Reicht z.z.: Zu $x, y \in R$, $y \neq 0$,
$\exists\, r, q : x = q \cdot y + r$ und $|r|^2 < |y|^2$. y inv. in $\mathbb{C}$, reicht
also, ein $q \in R$ zu finden mit $|\frac{x}{y} - q| < 1$. $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ Gitter,



$\frac{x}{y}$ liegt in einem Bereich dieses Gitters, und es
ex. ein Punkt in R, dessen Abstand zu $\frac{x}{y}$ nicht größer ist
als die halbe Länge der Diagonalen zu diesem Bereich, d.h. $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\Rightarrow \exists\, q \in R: |\frac{x}{y} - q| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

b) z.z: $N(xy) = N(x)N(y)$. $x = a+ib$, $y = c+id$. $\Rightarrow xy = ac - bd + i(cb+ad)$
$\Rightarrow N(xy) = (ac-bd)^2 + (cb+ad)^2 = (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (cd)^2 + 2abcd + (ad)^2 =$
$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = N(x) \cdot N(y)$.

c) $x \in R^\times \Rightarrow \exists\, y \in R: xy = 1 \Rightarrow 1 = N(xy) = N(x)N(y) \in \mathbb{N} \Rightarrow N(x) = N(y) = 1$.
Umgekehrt: $N(x) = 1$, $x = a+ib$, d.h. $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1$ und $b^2 = 0$
oder $b^2 = 1$ und $a^2 = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 1, \pm i\}$, die offensichtlich invertierbar sind.

d) $2 = (1+i)(1-i)$ in R, $N(1+i) = N(1-i) = 2$. Ang., $(1+i)$ ist reduzibel
($\Leftrightarrow$) $(1+i)$ kein Primelement, da HIR) $\Rightarrow (1+i) = a \cdot b \Rightarrow 2 = N(1+i) = N(a)N(b)$
$\Rightarrow N(a) = 1$ ~~oder~~ und $N(b) = 2$ oder umgekehrt $\Rightarrow a$ oder b Einheit nach c), $\lightning$.
$\Rightarrow$ Primfaktorzerlegung.

A3) a) $a, b \in \mathrm{Nil}\, R = \{a \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N}: a^n = 0\} \Rightarrow (a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$,
d.h. für $m \gg 0$ ist immer wenigstens eins der Summanden gleich $0 \Rightarrow$
$a+b \in \mathrm{Nil}\, R$. $(ra)^n = r^n a^n = 0$ trivial, d.h. Ideal.

b) Ang $(2,T) = (a) \Rightarrow a \cdot f = 2$. Wg. Gradformel muss a Grad 0 haben,
d.h. $a \in \mathbb{Z}$. Damit dann $a \cdot f = T$ gelten kann, muss a invertierbar
sein, d.h. $(a) = \mathbb{Z}[T]$. Offensichtlich ist aber $1 \notin (2,T)$.

c) $R = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (3)$, $\mathfrak{b} = (7) \Rightarrow \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 7, 9, \ldots\}$
aber $7 + 3 = 10 \notin \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$.

A4) a) 28 b) $X - 1$

LA 2, Blatt 3. 8.5.14

A1) a) Def. der VL: $nx := x + \dots + x$ wenn $n \in \mathbb{N}_0$

folgt aus Axiomen! $nx := -(-n)x$ wenn $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$.

Wenn $n \in \mathbb{Z}$, so $0 = (n-n) \cdot x = nx - nx$, d.h. $(-n)x = -(nx)$ muß gelten

$\leadsto$ reicht, $n \cdot x$ für $n \in \mathbb{N}_0$ festzulegen. $n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \Rightarrow n \cdot x = (1 + \dots + 1)x =$

$1x + \dots + 1 \cdot x = x + \dots + x$, d.h. wenn wir die Modulaxiome fordern, so ist die Def der VL die einzig mögliche.

b) M endlich $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$: $nx = 0 \; \forall x \in M$, denn: $N = \{nx \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subseteq M$

und wenn $0 \notin N$, so für $n \neq m$: $nx \neq mx$ (sonst: $\underbrace{(n-m)}_{\neq 0}x = 0$, d.h.

$0 \in N$) $\Rightarrow N$ muß ∞-viele Elt haben, $\lightning \Rightarrow 0 \in N$.

Wenn M $\mathbb{Q}$-VR, so also $\frac{n}{n} \cdot x = 1 \cdot x = x$, andererseits $= \frac{1}{n} \cdot (nx) = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$

$\lightning$ zu $x \neq 0$. (Stichwort: Torsion).

A2| Bew. wie bei Thm 1: $r =$ Rang (F), d.h. $\exists y_1, \dots, y_r$: $F = \sum_{i=1}^{r} Ry_i$

$r = 1$: $R \cong F$ entspricht Ideal, also endlich erz. ✓

$\begin{matrix} R & \cong & F \\ \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ \mathfrak{n} & = & M \end{matrix}$

$r > 1$: $F' = \sum_{i=1}^{r-1} R y_i$, $F'' = Ry_r$, $\pi: F \to F''$, $y_i \mapsto \begin{cases} 0 & i \leq r-1 \\ y_r & i = r \end{cases}$.

$\ker \pi = F'$. Nach I.V. sind die Um $M \cap F' \subseteq F'$, $\pi(M) \subseteq F''$ e.e. $\Rightarrow$

$\exists m_1, \dots, m_s \in M$: $M \cap F' = \langle m_1, \dots, m_k \rangle_R$, $\pi(M) = \langle \pi(m_{k+1}), \dots, \pi(m_s) \rangle_R \Rightarrow$

$M = \langle m_1, \dots, m_s \rangle_R$. ($x \in M$, $\pi(x) = \sum_{i=k+1}^{s} a_i \pi(m_i) \Rightarrow x - \sum a_i m_i \in \ker \pi$.)

A3| $M = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Ketten entsprechen Ketten in $\mathbb{Z}$ die (30) enthalten: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

1. $(30) \subseteq (15) \subseteq (5) \subseteq \mathbb{Z}$
2. $(30) \subseteq (15) \subseteq (3) \subseteq \mathbb{Z}$
3. $(30) \subseteq (10) \subseteq (5) \subseteq \mathbb{Z}$
4. $(30) \subseteq (10) \subseteq (2) \subseteq \mathbb{Z}$
5. $(30) \subseteq (6) \subseteq (3) \subseteq \mathbb{Z}$
6. $(30) \subseteq (6) \subseteq (2) \subseteq \mathbb{Z}$.

Quotienten in $\mathbb{Z}$ sollten daher Quotienten in $\mathbb{Z}/30$ entsprechen: Ist $n \mid m \mid 30$

so betrachte die von $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/30$ ind. Abb. $(n) \to (n)/(30) \to ((n)/(30)) / (m)/(30)$

Diese hat als Kern offensichtlich (m) und ist surjektiv $\Rightarrow$

$(n)/(m) \cong ((n)/(30)) / ((m)/(30))$. D.h. reicht, Quotienten in $\mathbb{Z}$ zu berechnen.

Weiter hat man für $n \mid m$: $\mathbb{Z} \to (n)/(m)$, $k \mapsto n \cdot k$ als Modulhom,

mit Kern $(\frac{m}{n})$ und surjektiv $\Rightarrow \mathbb{Z}/(\frac{m}{n}) \cong (n)/(m)$. Man stellt dann

leicht fest, daß in jeder Kette (bis auf Vertauschen) die Quotienten

$\mathbb{Z}/(5)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(2)$ auftauchen (Stichwort: Jordan-Hölder-Reihe).

A4) a) Wie bei Körpern, vgl Skript oder Bosch.

b) A inv. $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in M_n \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = 1 \Rightarrow \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 =$

$\det A \cdot (\det A)^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \in R^\times$.

Ist $\det A \in R^\times$, so ist $A^\# \cdot \det(A)^{-1}$ Inverse zu A (R kommutativ!)

c) Sei $R^m \cong R^n$ und ang., $m < n$. $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ Basis von R^n,

$(f_j)_{j=1,\dots,m}$ Basis von R^m $\Rightarrow$ $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i$, $e_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j$

$\Rightarrow e_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_{ij} a_{jk} e_k$. Da e_i Basis: $\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk} \overset{(*)}{=} \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$n \times n$ Matrizen über R. $\Rightarrow$ $(*)$ ist äquiv. zu $BA = I_n$ $\Rightarrow$

$AB = I_n$ ↯, da Nullzeilen in A $\Rightarrow$ $AB \neq I_n$ $\Rightarrow$ $m \geq n$.

Symmetrie: $n \geq m$ $\Rightarrow$ $m = n$.

ad A2) Nein, Gegenbeispiel: $\mathbb{Z}[X]$ als $\mathbb{Z}[X]$-Modul, frei mit Basis 1,

$(2, X) = M \subseteq \mathbb{Z}[X]$ $\Rightarrow$ $\cancel{0 = X \cdot 2 + (-2) \cdot X}$ Wenn Basis B von M ex., so muß sie mehr als zwei Elemente umfassen, da $\mathbb{Z}[X]$ kein HIR., z.B.

$f, g \in B$ $\Rightarrow$ $0 = g \cdot f + (-f) \cdot g$ $\Rightarrow$ (f, g) nicht l.u. ↯.

LA2, Blatt 4, 8.5.14

A1) i) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1+x & \\ & 1-x^2 \end{pmatrix}$

A2) a) Aus 1b), Blatt zeigt man induktiv: $(a_1) \cap (a_2) \cap \ldots \cap (a_n) = \text{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$

$x \in \ker f \Leftrightarrow x \in (p_i^{\nu_i}) \ \forall i \Leftrightarrow x \in (p_1^{\nu_1}) \cap \ldots \cap (p_n^{\nu_n}) = \text{kgV}(\ldots) = (a)$.

Homsatz: $\bar{f}: R/(a) \to \bigoplus R/(p_i^{\nu_i})$ wohldef. & injektiv.

b) Wegen $r_i p_i^{\nu_i} + s_i \frac{a}{p_i^{\nu_i}} = 1$ gilt: $e_i \equiv \begin{cases} 1 & \text{mod } p_i^{\nu_i} \\ 0 & \text{mod } p_j^{\nu_j}, j \neq i. \end{cases}$

$\Rightarrow \sum x_i e_i + (a) \equiv x_i \ (p_i^{\nu_i})$.

A3) $n = \#$  $\Rightarrow n \equiv 2 \ (3), \ n \equiv 1 \ (5), \ n \equiv 2 \ (7), \ 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

$\Rightarrow 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 35 = 1 \Rightarrow e_1 = -35, \ -4 \cdot 5 + 1 \cdot 21 = 1 \Rightarrow e_2 = 21$

$-2 \cdot 7 + 1 \cdot 15 = 1 \Rightarrow e_3 = 15 \Rightarrow 2 \cdot (-35) + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = -19$,

negativ, also $+105 = 86$ ist die Lösung.

A4) a) $0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} 0$ (*). ~~ist~~ ist exakt $\Leftrightarrow$ exakt bei M_1, M_2, M_3.

M_1: $\ker f_1 = \text{Im} f_0 = 0 \Leftrightarrow f_1$ injektiv. M_2 ist Definition.

M_3: $\underbrace{\ker f_3}_{M_3} = \text{Im} f_2 \Leftrightarrow f_2$ surjektiv.

b) $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \overset{A}{\overbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$

$a \mapsto (a, 0)$

$(a, b) \mapsto b$

Beide exakt.

$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \overset{A'}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$

$a \mapsto 2a$

$\bar{1} \mapsto \bar{1}$

$A' \not\cong A$, sonst: jedes $x \in A$ entspricht Element $y \neq 0$ in A' aber $x + x = 0$, und in A' ex. ~~[illegible]~~ aber Elt. y mit $y + y \neq 0$. $\forall$ solche x $\lightning$

LA2 Blatt 5 23.5.14

A1) a) 1. Möglichkeit: Eindeutigkeitsaussage des Elementarteilersatzes
2. Möglichkeit: direkt (ähnlich wie bei letzter Aufgabe auf vorigem Blatt)
Jedes Element in $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{n-r}\mathbb{Z}$ hat Ordnung $\leq \max(p^r, p^{n-r})$, aber in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ex. Elemente (1) mit Ordnung $p^n > \max(p^r, p^{n-r})$.
b) $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Jede endliche ab. Gruppe ist isom zu $\prod \mathbb{Z}/p_i^{n_i}$ (eindeutig) nach a) oder Elem. teilersatz. $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25$, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/25$, $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5$, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5$ sind alle möglichen Gruppen.

A2) a) $\ker f \subseteq V$ ist f-inv.: $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \in \ker f$. $\Rightarrow \ker f = 0$, da V, $f \neq 0$ kein f-inv. (echten) UR enthält. $\mathrm{Bild} f \subseteq V$ ~~ist~~ f-inv.: $x \in \mathrm{Bild} f$, $x = f(y)$ $\Rightarrow f(x) = f^2(y) \in \mathrm{Bild} f$. $\Rightarrow f(V) = V$, da $f \neq 0$. $\Rightarrow$ f iso.
b) $U := \langle f^i(u) \rangle \subset V$ ist f-inv.: klar. $\Rightarrow 0 \neq U = V$, da $u \neq 0$.
c) $k = \mathbb{F}_2$, $p(T) = T^3 + T^2 + 1$ $\Rightarrow p(0) = 1$, $p(1) = 1$ $\Rightarrow$ p hat kein Nst in $\mathbb{F}_2$. $\Rightarrow$ p irred $\Rightarrow$ $\mathbb{F}_2[T]/(p(T))$ 3-dim. $\mathbb{F}_2$-VR, der keine $f(=\cdot T)$-inv. UR haben kann ("Unterräume müssen von Teilern von $p(T)$ kommen".)
$k[T]/(p^2(T))$ für ein Primpolygon $p(T) \in k[T]$ ist f-unzerlegbar ($f = \cdot T$) hat aber $(p(T))/(p^2(T))$ als f-inv. UR.
Zusatz: Nein, da zunächst $V \cong \bigoplus k[T]/p_i^{n_i}$ als $k[T]$-Moduln $\Rightarrow V = k[T]/(p_i^{n_i})$. Außerdem muss $n_i = 1$ gelten und p_i ein Primpolynom sein. Es gibt aber kein Primpolynom von Grad 3 über $\mathbb{R}[T]$ (hat immer eine Nst: )

A3) (Vgl. auch Aufgabe 63, Zusatzblatt LA 1.)
O.E. $V_1 \subseteq V_2$ (via α), $(v_1, \dots, v_m)$ Basis von V_1, $(\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_n)$ Basis von $V_3 \cong V_2/V_1$ mit lifts $(v_{m+1}, \dots, v_n)$ in V_2 (β surj.) $\Rightarrow$ $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V_2 $\Rightarrow$ Abb. matrix von f_2 geg. durch $M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, M_1 Matrix von f_1 (bzgl. $(v_1, \dots, v_m)$), M_2 Matrix von f_3 (bzgl. $(\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_n)$) $\Rightarrow$
$\chi_{f_2}(T) = \det(T \cdot I_n - M) = \det(T \cdot I_m - M_1) \cdot \det(T \cdot I_{n-m} - M_2) = \chi_{f_1}(T) \cdot \chi_{f_2}(T)$.

A4) a) V endlich-dim! V f-zyklisch $\Leftrightarrow$ $V = k[T]/(p(T))$ für Polynom $p(T)$.
U Untervektorraum f-inv. $\Leftrightarrow$ U Ideal in $k[T]$, das $p(T)$ enthält, $U = (q(T))$ und $q(T) \mid p(T)$, $U = (q(T))/(p(T))$ $\quad r(T) q(T) = p(T)$.
$\cong k[T]/(r(T))$ via: $\varphi: k[T] \to (q(T))/(p(T))$, $s(T) \mapsto q(T) \cdot s(T)$, offensichtlich surj., $\ker \varphi = (r(T))$. $\Rightarrow$ U f-zyklisch.
b) einfach...

LA 2 Blatt 6 23.5.14

A1) $A \simeq \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$ in allen Fällen. $B \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & -2 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$, $B \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

$C \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $C \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$.

vgl. auch Musterlösung dazu.

A2) (Vgl. Aufgabe 58, LA 1). Möglichkeiten für χ_A bzw. p_A:

$\chi_A(T) = (T-a)(T^2+bT+c)$ Primfaktorzerleg. $\Rightarrow p_A = \chi_A$, $A \sim \begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & -c \\ & 1 & -b \end{pmatrix} \sim B$.

$\chi_A(T) = (T-a)^3$, $p_A(T) = (T-A)^3 \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ & 1 & a \end{pmatrix} \sim B$

$\chi_A(T) = (T-a)^3$, $p_A(T) = (T-A)^2 \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & 1 & a \end{pmatrix} \sim B$ (dim des ER zu EW a kann nicht 1 sein)

... $p_A(T) = (T-A) \Rightarrow$ $A \sim \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$

$\chi_A(T) = T^3 + aT^2 + bT + c$ kann nicht passieren, da Polynom 3. Grades in $\mathbb{R}$ immer eine Nst hat. $\Rightarrow$ JNF / allg. NF schon durch χ_A bzw p_A festgelegt.

$\mathbb{R}^{4\times 4}$: z.B. $\chi_A(T) = (T-a)^4$, $p_A(T) = (T-a)^2$, so $\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & & a & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$ möglich

A3) $\chi_A(T) = (T^2+1)(T-2)^2$. $\operatorname{Kern}(A^2+1) = \langle (1,0,2,-2)^t, (3,-2,0,0)^t \rangle$.

$\Rightarrow B_1 = ((1,0,2,-2)^t, A\cdot(1,0,2,-2))$ ist Basis vom "$K[T]/(T^2+1)$-Teil" von $V = \mathbb{R}^4$.

(vgl. A2 b) von Blatt 5.)

$\operatorname{Kern}(A-2) = \langle (1,0,2,-1)^t \rangle$, $\operatorname{Kern}((A-2)^2) = \langle (1,0,2,-1)^t, (0,0,1,0)^t \rangle$.

$\Rightarrow B_2 = ((1,0,2,-1)^t, (0,0,1,0)^t)$ Basis von "$K[T]/(T-2)^2$-Teil".

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$, wobei der hintere eigtl. Jordan-Kasten.

wähle also $B_2 = ((0,0,1,0)^t, A\cdot(0,0,1,0)^t) \Rightarrow$

$S' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S'^{-1}\cdot A \cdot S' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix}$ allg. NF.

A4) a) klar, genau wie im Skript mit Induktion.

b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Blatt 7 LA2 5.6.14

A1] Allg. Elt von $V \otimes W$ sind v.d. Form $x = \sum_i' x_i \otimes y_i$, $x_i \in V$, $y_i \in W$

$\Rightarrow x_i = \sum_j a_{ij} v_j$, $y_i = \sum_k b_{ik} w_k$; $x = \sum_{i,j,k} a_{ij} b_{ik} v_j \otimes w_k$, d.h. $(v_i \otimes w_j)$ ist Erz. System von $V \otimes W$.

$f_{ij}: V \times W \to K$, wie in Aufg. ist bil. $\forall i,j$. $\Rightarrow f_{ij,*}: V \otimes W \to K$ ex. eind.

Sei $x = \sum_{i,j} a_{ij} v_i \otimes w_j = 0 \Rightarrow \underset{0}{f_{kl*}(x)} = \sum a_{ij} f_{kl*}(v_i \otimes w_j) = \sum a_{ij} f_{kl}((v_i, w_j)) = a_{kl}$

$\forall k,l \Rightarrow (v_i \otimes w_j)$ l.u., also Basis.

A2] $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/ggt(m,n)$, sei $ggT(m,n) = c \Rightarrow \exists r,s$; $c = rn + sm$

Sei $b: \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \to L$ bil. für bel. ab. Gruppe L, $\eta: \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/c$ geg. durch $(\bar a, \bar b) \mapsto \overline{a \cdot b}$ (ex. da $c \mid n, m \Leftrightarrow (m) \subseteq (c), (n) \subseteq (c)$) $\Rightarrow \eta$ bil.,

Beh: Zu b ex. $l: \mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \to L$, eind., s.d. $l \circ \eta = b$.

Bew: Sei $\bar a \in \mathbb{Z}/c$ bel., so $\bar a \in \mathbb{Z}/n$ wird auf dieses $\bar a \in \mathbb{Z}/c$ durch die Surjektion $\pi: \mathbb{Z}/n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/c$ abgebildet. Setze $l(\bar a) = b(\bar 1, \bar a)$

l wohldef.: Ist $\bar a' \in \mathbb{Z}/n$ mit $\pi(\bar a') = 0$, so $a' \in (c) \Rightarrow a' = t \cdot c = trn + tsm$

$\Rightarrow b(\bar 1, \bar a') = b(\bar 1, \overline{trn + tsm}) = b(\bar 1, \overline{trn}) + b(\bar 1, \overline{tsm}) = 0 + m \cdot b(\bar 1, \overline{ts}) = b(\bar m, \overline{ts}) = 0$

$l \circ \eta = b$: $l \circ \eta(\bar a, \bar b) = l(\overline{ab}) = b(1, \overline{ab}) = a \cdot b(1, \bar b) = b(\bar a, \bar b)$ (schlechte Bezeichnung… zwei b's, Bitte ändern)

l eindeutig: Sei l' mit $l' \circ \eta = b$, $\bar\alpha \in \mathbb{Z}/c \Rightarrow \pi(\bar\alpha) = \bar\alpha$.

$l' \circ \eta(1, \bar\alpha) = l'(\bar\alpha) = b(1, \bar\alpha) = l \circ \eta(\bar\alpha) = l(\bar\alpha) \Rightarrow l = l'$,

$\Rightarrow \mathbb{Z}/c$ eind. Isom zu $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n$

A3] a) $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$: $\bar a \otimes b \in \mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ Elementartensor. $\Rightarrow \bar a \otimes b = \bar a \otimes \frac{n}{n} \cdot a =$

$n(\bar a \otimes \frac{a}{n}) = \overline{na} \otimes \frac{a}{n} = 0 \otimes \frac{a}{n} = 0 \otimes 0 = 0$.

b) ähnliche Rechnung wie im Beispiel der VL: Beachte: $1 = rp + sq$ macht Sinn in $\mathbb{Z}/pq$ und $\mathbb{Z}/p$, $\mathbb{Z}/q$ sind $\mathbb{Z}/pq$-Moduln!

c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$; Sei $\eta: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ $\Rightarrow \eta$ $\mathbb{Z}$-bil. $\Rightarrow \eta_*: \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Ist $b: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to L$ bil., so ex. eind. $l: \mathbb{Q} \to L$ mit $\eta \circ l = b$ via:

$l(x) = b(x, 1)$. Bew. wie vorher.

A4] a) $V \otimes_K L$ L-VR: klar.

b) Sei $\alpha: Hom_L(V \otimes_K L, W) \to Hom_K(V, W)$ geg. durch $\phi \mapsto (v \mapsto \phi(v \otimes 1)) = \alpha(\phi)$

Sei $\beta: Hom_K(V, W) \to Hom_L(V \otimes_K L, W)$ geg. durch $\varphi \mapsto (v \otimes a \mapsto a \cdot \varphi(v)) = \beta(\varphi)$.

$\Rightarrow \alpha, \beta$ wohldef. und $\beta(\alpha(\phi))(v \otimes a) = a \cdot \alpha(\phi(v)) = a \cdot \phi(v \otimes 1) =$

$\phi(a \cdot (v \otimes 1)) = \phi(v \otimes a)$, $\alpha(\beta(\varphi))(v) = \beta(\varphi)(v \otimes 1) = 1 \cdot \varphi(v)$, d.h.

$\beta \circ \alpha = id$, $\alpha \circ \beta = id \Rightarrow$ Isom.

Zusatz Nachrechnen: beide Abb. verträglich mit L-VR Struktur.

Blatt 5 LA2 5.6.14

A1) b bilinear $\Rightarrow$ $b_*: V\otimes_k V^* \to \mathrm{End}_k(V)$ ex.
Sei $v_1,\dots,v_n$ Basis von V, $v_1^*,\dots,v_n^*$ duale Basis in V^*. Sei
$b_*(\sum c_{ij}\, v_i\otimes v_j^*) = 0$, d.h. $\sum c_{ij}\, b_*(v_i\otimes v_j^*)(v_k) = \sum_{i,j} c_{ij}\, v_j^*(v_k)\cdot v_i = \sum_i c_{ij}\cdot v_i = 0$
für alle j. Da (v_i) Basis von V $\Rightarrow$ $c_{ij}=0$ $\forall i,j$ $\Rightarrow$ b_* injektiv
Dimension links & rechts ist beide mal $n\cdot n$ $\Rightarrow$ Bel.
Noch z.z.

$$\begin{array}{ccc} (V\otimes_k V^*)\times(V\otimes_k V^*) & \xrightarrow{\circ} & V\otimes_k V^* \\ \downarrow b_*\times b_* & & \downarrow b_* \\ \mathrm{End}V\times\mathrm{End}V & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{End}V \end{array}$$

kommutiert
Sei $x\in V$ $\Rightarrow$

$b_*(v\otimes\lambda)\circ b_*(w\otimes\mu)(x) = b_*(v\otimes\lambda)\big(b_*(w\otimes\mu)(x)\big) = b_*(v\otimes\lambda)(\mu(x)\cdot w) =$
$\mu(x)\cdot b_*(v\otimes\lambda)(w) = \mu(x)\lambda(w)v$ und
$b_*((v\otimes\lambda)\circ(w\otimes\mu))(x) = b_*(\lambda(w)(v\otimes\mu))(x) = \lambda(w)\,\mu(x)\cdot v$ ✓

A2) $\eta: R[T]\times S\to S[T]$, $(f(T),s)\mapsto s\cdot f(T)$ ist R-bilinear $\Rightarrow$
$\eta_*: R[T]\otimes_R S\to S[T]$ ex., R-linear. Ist $aT^n\in S[T]$, so sei
$\rho(aT^n) = T^n\otimes a\in R[T]\otimes_R S$ def. und R-lin. fortgesetzt zu einer
Abb. $\rho: S[T]\to R[T]\otimes_R S$ $\Rightarrow$ $\eta_*\circ\rho = id_{S[T]}$, $\rho\circ\eta_* = id_{R[T]\otimes_R S}$ $\Rightarrow$
η_* Iso von R-Moduln.
$R[T]\otimes_R S$ ist komm. Ring mit Eins $1\otimes 1$ mit der Def. und es
gilt $\eta_*((f(T)\otimes a)\cdot(g(T)\otimes b)) = \eta_*(f(T)g(T)\otimes a\cdot b) = a\cdot b\, f(T)g(T) =$
$a\cdot f(T)\cdot b\, g(T) = \eta_*(f(T)\otimes a)\cdot\eta_*(g(T)\otimes b)$ $\Rightarrow$ Ring hom.

A3) a) z.z. i) $\beta\otimes id$ surjektiv und ii) $\ker(\beta\otimes id) = \mathrm{Im}(\alpha\otimes id)$
i) Ist $a\otimes b\in M_3\otimes_R N$, so ex. $a'\in M_2$: $\beta(a')=a$ $\Rightarrow$ $\beta\otimes id(a'\otimes b) = a\otimes b$.
ii) klar: $\mathrm{Im}(\alpha\otimes id)\subseteq\ker(\beta\otimes id)$. Reicht z.z.: $M_2\otimes_R N/\mathrm{Im}(\alpha\otimes id)\xrightarrow[\sim]{\beta\otimes id}$
$M_3\otimes_R N$. Sei $\gamma: M_3\times N\to M_2\otimes N/\mathrm{Im}(\alpha\otimes id)$ geg. durch
$\gamma(x,y) = \overline{x'\otimes y}$, wobei x' so, daß $\beta(x')=x$
γ wohldef. Ist $x''\in M_2$ mit $\beta(x'')=x$ $\Rightarrow$ $x'\otimes y - x''\otimes y = (x'-x'')\otimes y\in$
$\mathrm{Im}(\alpha\otimes id)$, da $\beta(x'-x'')=0$.
γ ist bilinear $\Rightarrow$ $\exists!\,\gamma_*: M_3\otimes N\to M_2\otimes N/\mathrm{Im}(\alpha\otimes id)$ und
$\gamma_*\circ\beta\otimes id = id$, $\beta\otimes id\circ\gamma_* = id$. $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(\alpha\otimes id) = \ker(\beta\otimes id)$.

b) $\eta_1: R\times_R N\to N$, $(a,n)\mapsto a\cdot n$, $\eta_2: N\times_R R/(r)\to N/rN$ $(n,\bar a)\mapsto\overline{a\cdot n}$
bil., wohldef. $\Rightarrow$ η_{1*}, η_{2*} ex. η_{1*} offensichtlich Iso
Umkehrabb. zu η_{2*}: $\alpha: \bar n\mapsto(n,\bar 1)$ α wohldef.: Ist $n\in rN$, d.h.
$n = r\cdot n'$, so $rn'\otimes 1 = n'\otimes\bar r = 0$
Man hat $\eta_{2*}\circ\alpha = id$, $\alpha\circ\eta_{2*} = id$ $\Rightarrow$ Isos.

c) r kein Nullteiler $\Rightarrow$ $0 \to R \xrightarrow{\cdot r} R \xrightarrow{\pi} R/(r) \to 0$ exakt.
$\qquad a \mapsto a \cdot r$

Tensoriere mit $\otimes_R N$ $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_R N \arrow[r, "\cdot r \otimes id"] \arrow[d, "\cong"] & R \otimes_R N \arrow[r, "\pi \otimes id"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & R/(r) \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
N \arrow[r, "\cdot r"] & N \arrow[r, "n \mapsto \bar{n}"] & N/rN \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakt nach a)
nach c)

und die zwei Vierecke kommutieren: z.B. (1):

$$\begin{tikzcd}
a \otimes n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \bar{a} \otimes n \arrow[d, mapsto] \\
a \cdot n \arrow[r, mapsto] & \overline{a n}
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich heißt die Sequenz dann die Fortsetzung $N_r \to N \xrightarrow{\cdot r} N \to N/rN \to 0$. ✓

d) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$, $n \neq 0$, $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$N_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\cdot n = 0} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n \to 0$ ist die resultierende Sequenz

LA II Blatt 9

A1) a) $T(M) = R \oplus M \oplus M^{\otimes 2} \oplus \ldots$, ebenso für N. Fortsetzen bedeutet,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ T(M) & \xrightarrow{T(f)} & T(N) \end{array}$$

muss kommutieren, wobei ι jeweils die Abb sind, die $m \mapsto (0, m, 0, \ldots)$ (analog für N) schicken. Bilde

also $(r, m_1, m_1^2 \otimes m_2^2, \ldots) \mapsto (r, f(m_1), f(m_1^2) \otimes f(m_2^2), \ldots)$ ab. Linearität klar.

Reicht z.z.: ist $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, $y = y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \in T(M)$, so gilt $T(f)(x \cdot y) = T(f)(x) \cdot T(f)(y)$:

$T(f)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) = f(x_1) \otimes \ldots \otimes f(y_m) = (f(x_1) \otimes \ldots \otimes f(x_n)) \cdot (f(y_1) \otimes \ldots \otimes f(y_m)) =$

$T(f)(x) \cdot T(f)(y)$ ✓

Alternativ: folgt aus A2 a) für $A = T(N)$, $\varphi: M \to N \xrightarrow{\iota} T(N)$

b) reicht z.z.: $M \otimes M \to N \otimes N$ nicht injektiv: $0 \neq \bar{2} \otimes \bar{2} \mapsto \bar{2} \otimes \bar{2} = 2 \cdot (\bar{2} \otimes \bar{1}) = \bar{4} \otimes \bar{1} = \bar{0} \otimes \bar{1} = 0$.

A2) a)

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \varphi_* & \\ T(M) & & \end{array}$$

: φ_* sendet $(r, x_1, x_2 \otimes x_3, \ldots)$ auf $r \cdot \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \cdot \ldots$ (endliches Produkt: ignoriere die 0 überall).

φ_* ist Algebrenhom: klar, wie oben A1, a).

Eindeutigkeit: φ'_*, sodass Diagramm kommutiert $\Rightarrow$ $\varphi'_*(\iota(m)) = \varphi(m) = \varphi_*(\iota(m))$

d.h. $\varphi'_*(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \overset{\text{Alg.}}{\underset{\text{hom}}{=}} \varphi'_*(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi'_*(x_n) = \varphi'_*(\iota(x_1)) \cdot \ldots \cdot \varphi'_*(\iota(x_n)) =$

$\varphi_*(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_*(x_n) = \varphi_*(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \Rightarrow \varphi_* = \varphi'_*$!

b) $\mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(M, A) \to \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg.}}(T(M), A)$

$\varphi \mapsto \varphi_*$

$\psi|_M \leftarrow \psi$ wie in Hinweis. Z.z.: i) $\varphi_*|_M = \varphi$, ii) $(\psi|_M)_* = \psi$.

i) $\varphi_*|_M(x) = \varphi_*(0, m, 0, \ldots) = \varphi(\iota(m)) = \varphi(m)$

ii) $(\psi|_M)_*(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = (\psi|_M)_*(x_1) \cdot \ldots \cdot (\psi|_M)_*(x_n) = \psi|_M(\iota(x_1)) \cdots \psi|_M(\iota(x_n)) =$

$\psi(x_1) \cdots \psi(x_n) = \psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$.

A3) klar: ist $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V, ~~so ist~~ und $(n_i)_{i=1,\ldots,n}$ mit $\sum n_i = r$, so ist $(\underbrace{v_1 \otimes \ldots \otimes v_1}_{n_1} \otimes \underbrace{v_2 \otimes \ldots \otimes v_2}_{n_2} \otimes \ldots \otimes \underbrace{v_n \otimes \ldots \otimes v_n}_{n_n}) \in V^{\otimes r}$, und alle diese Bilden Basis von $S^r(V)$ (Erz.system klar, l.u. siehe VL, Satz 2, S. 186).

Berechne also alle n-Tupel $(n_i)_{i=1,\ldots,n}$, s.d. $\sum n_i = r$, mit $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 0$.

D.h. man "zieht" r Kugeln aus einer Menge mit n Kugeln mit Zurücklegen, beachtet aber nicht die Reihenfolge dabei. Aus der Kombinatorik weiss man, daß dabei $\binom{n+q-1}{q}$ Möglichkeiten bestehen. Vgl. jedes Stochastik-Buch, oder z.B. den "Stars and Bars"-Artikel auf dem Englischen Wiki für einen Beweis

A4) a) $\mathbb{Q}^{\otimes n} \cong \mathbb{Q}$ via $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto x_1 \cdots x_n$ (vgl. Aufg. 3c

$\mathfrak{a}_n = \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_n : x_i = x_j$ für $i \neq j \rangle \overset{!}{=} \mathbb{Q}$, ~~id~~ (mit obigen Iso.), da:

ist $\frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$, so $\frac{1}{m} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \mapsto \frac{1}{m}$ $\Rightarrow$ $\frac{k}{m}$ im Bild von $\mathfrak{a}_n$, $k, m \in \mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}$-lin.

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^{\otimes n} / \mathfrak{a}_n = 0$.

b) Ist $x = \frac{a_1}{m^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{a_n}{m^{k_n}} \in \Lambda^n \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, so für ~~Hex~~ ~~geeignetes~~ z.B. (falls $k_2 \geq k_1$)

$$a_1 \cdot a_2 \cdot m^{(k_2 - k_1)} \cdot (x) = \frac{a_1 a_2}{m^{k_1}} \otimes \frac{a_1 a_2}{m^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{a_n}{m^{k_n}} = 0 .$$

LA II Blatt 10

A1) Nach Vor. ist $f': G \to (\mathbb{R}^n)^*$ (aufgefasst als Fkt nach $\mathbb{R}^n$) wieder diffbar, d.h. für jedes $v \in G$ ist $f''(v)$ eine lin. Abb.
$f''(v): \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^{**} \cong (\mathbb{R}^n)^* \in \mathrm{Hom}_K(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*) = \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

A2) Beweis steht in Lorenz, LA II: Satz 3 auf Seite 19.
Als Spezialfall sollte man auch Satz 3' erwähnen.

A3) a) $\frac{1}{2}(\beta+\tilde{\beta})(u,v) = \frac{1}{2}(\beta(u,v)+\beta(v,u)) = \frac{1}{2}(\beta+\tilde{\beta})(v,u) \quad \forall u,v \in V. \Rightarrow$
$\frac{1}{2}(\beta+\tilde{\beta})$ symmetrisch.
$\frac{1}{2}(\beta-\tilde{\beta})(v,v) = \frac{1}{2}(\beta(v,v)-\beta(v,v)) = 0 \quad \forall v \Rightarrow \frac{1}{2}(\beta-\tilde{\beta})$ alternierend.

b) Offensichtlich gilt: $\underset{\mathrm{Sym}^2_K(V)}{\overset{\shortparallel}{(S^2(V))^*}} \subseteq \underset{\mathrm{Bil}_K(V)}{\overset{\shortparallel}{(V\otimes_K V)^*}}$ und $\underset{\mathrm{Alt}^2_K(V)}{\overset{\shortparallel}{(\Lambda^2(V))^*}} \subseteq \underset{\mathrm{Bil}_K(V)}{\overset{\shortparallel}{(V\otimes V)^*}}$

und $\mathrm{Sym}^2(V) \cap \mathrm{Alt}^2(V) = 0$, denn wenn $\beta \in$ linke Seite, so
$\beta(u,v) = \beta(v,u)$ und $\beta(u,v) = -\beta(v,u)$, d.h. $2\beta(u,v) = 0 \Rightarrow \beta(u,v) = 0 \ \forall u,v \in V$.
Ist $\beta \in (V\otimes V)^*$ bel., so gilt $\beta = \underbrace{\frac{1}{2}(\beta+\tilde{\beta})}_{\in (S^2(V))^*} + \underbrace{\frac{1}{2}(\beta-\tilde{\beta})}_{\in (\Lambda^2(V))^*} \Rightarrow$
$(V\otimes_K V)^* \cong (S^2(V))^* \oplus (\Lambda^2(V))^*$.

c) Nach Dualisieren aus folgt $V\otimes_K V \cong S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$, sodaß die Projektion
$V\otimes V \to S^2(V)$, $v\otimes w \mapsto \frac{1}{2}(v\otimes w + w\otimes v)$ die gewünschte ex. Sequenz liefert.

A4) a) Seien $y_1, y_2 \in X^\perp$, $a \in K \Rightarrow \forall x \in X: \beta(x, ay_1+y_2) =$
$a\beta(x,y_1) + \beta(x,y_2) = 0 \Rightarrow ay_1+y_2 \in X^\perp \Rightarrow X^\perp \leq W$. Analog für ${}^\perp Y$.

b) Klar: $\langle X\rangle^\perp \subseteq X^\perp$. Sei $\beta(x,y) = 0 \ \forall x \in X$, d.h. $y \in X^\perp$, und
$\sum a_i x_i \in \langle X\rangle \Rightarrow \beta(\sum a_i x_i, y) = \sum a_i \beta(x_i, y) = 0 \Rightarrow y \in \langle X\rangle^\perp$. Analog für ${}^\perp Y$.

c) $\beta_1: V \to W^*$, $x \mapsto \beta(x,-)$. $x \in {}^\perp W \Leftrightarrow \beta(x,y) = 0 \ \forall y \in W \Leftrightarrow$
$\beta(x,-) = 0$ als Element in $W^* \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\beta_1$. Analog für $\beta_2: W \to V^*$.

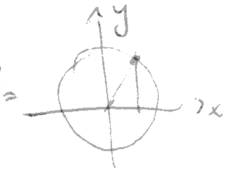
d) $x \in {}^\perp W \cap X \Leftrightarrow \beta(x,y) = 0 \ \forall y \in W \wedge x \in X \Leftrightarrow \beta(x,-) = 0$ und $x \in X \Leftrightarrow$
$x \in \mathrm{Ker}\,\beta_1 \wedge x \in X \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\beta_{1|X}$. Analog für $V^\perp \cap Y$.

LA II, Blatt 11

A2 $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ symmetrisch: $B^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = B$

$q(x) = x^tAx$, Andererseits: $x^t \frac{1}{2}(A + A^t)x = \frac{1}{2}x^tAx + \underbrace{\frac{1}{2}x^tA^tx}_{\in K^{1\times 1}}$

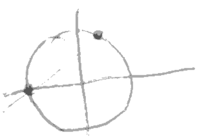
$= \frac{1}{2}x^tAx + \frac{1}{2}(x^tA^tx)^t = \frac{1}{2}x^tAx + \frac{1}{2}x^tAx = q(x)$.

A3 a) $S^1 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$: Kreis im $\mathbb{R}^2$: $S^1 =$ 

bedeutet $x^2 + y^2 = 1^2$. Nach Pythagoras sind gerade die Punkte auf dem Kreis mit Radius 1.

b) Eine Rechnung zeigt, daß $(x,y,1) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1\right)$ für $t \in \mathbb{R}$ in C und E liegt.

Umgekehrt: jeder Punkt auf S^1_x, der nicht $(-1,0,1)$ ist, beschreibt eine Gerade mit Steigung t: $y = tx + t$



d.h. jeder andere Punkt auf S^1 wird durch einen solchen Schnittpunkt beschrieben. Setze also in $x^2 + y^2 = 1$ ein:

$x^2 + (tx+t)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + t^2x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2t^2}{(1+t^2)}x + \frac{t^2-1}{1+t^2} = 0$

hat mit der p-q-Formel die Lsg. $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1\right)$ bzw $(-1,0,1)$ $\Rightarrow$ Beh.

A4 z.z.:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta_{q,1}"] \arrow[d, "s"'] & V^* \\ V' \arrow[r, "\beta_{q',1}"] & (V')^* \arrow[u, "s^*"'] \end{tikzcd}$$
kommutiert; d.h. $\beta_{q,1} = s^* \circ \beta_{q',1} \circ s$

Sei $v \in V$, $w \in V \Rightarrow \beta_{q,1}(v)(w) = \beta_q(v,-)(w) = \beta_q(v,w)$

Andererseits $(s^* \circ \beta_{q',1} \circ s)(v)(w) =$

$(s^* \circ \beta_{q',1}(s(v)))(w) = s^*(\beta_{q'}(s(v),-))(w) = \beta_{q'}(s(v), s(-))(w) = \beta_{q'}(s(v), s(w)) = \beta_q(v,w)$ ✓. Damit: Wäre s nicht inj, so $\exists\, x \neq y \in V$: $s(x) = s(y)$

$\Rightarrow \beta_{q,1}(x) = \beta_{q,1}(y)$, ↯ zu $\beta_{q,1}$ inj.

A1 a) $f''(v)$ ist eine symm. Matrix, da 2-mal diffbar (Hessematrix) $\Rightarrow$ quadr. Form durch $q(v): x \mapsto x^t f''(v) x$.

$q(v) > 0 \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n$: q pos. def., analog die anderen Begriffe.

b) $f_1''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $q_1(0,0) = 2x^2 + 2y^2$ pos def! $\Rightarrow f_1$ hat Min bei 0, da dort die Abl. verschw. Analog:

$f_2''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, hat Max. bei 0.

$f_3''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ indefinit, kein Extrem, hat Sattelpunkt bei 0.

LA II Blatt 12

A2) a) $\det A \in K^\times$, da q nicht-ausg. $(K^\times)^2$ ist Untergruppe von $K^\times$ (sogar Normalteiler)

d.h. $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in (K^\times)^2$ ist tatsächlich Äquivalenz.

Ist B Strukturm. bzgl. anderer Basis, so gilt $B = S^t A S$ für $S \in Gl_n(K)$ $\Rightarrow$ $\det B = (\det S)^2 \cdot \det A$ $\Rightarrow$ $\det A^{-1} \det B \in (K^\times)^2$ $\Rightarrow$

$\det A \sim \det B$, also $d(q)$ wohldef.

b) $(K^\times)/(K^\times)^2 = \{\pm 1\}$ für $K = \mathbb{R}$: $a \in K^\times, a > 0$: $a \sim 1 \Leftrightarrow a \in (\mathbb{R}^\times)^2$ klar, da $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$ ex. $a \in K^\times, a < 0$: $a \sim -1 \Leftrightarrow -a \in (\mathbb{R}^\times)^2$ ebenso klar.

Reicht nicht, da z.B. $[-1, 1, 1] \not\cong [-1, -1, -1]$ nach Sylvester, aber Det gleich.

A3) $U_i^\perp = \{ v \in V \mid \beta_q(v, u) = 0 \ \forall u \in U_i \}$. $U_i \cap U_i^\perp \ni v$: $\beta_q(v, -) = 0$ auf U_i aber $U_i \xrightarrow{\beta_q} U_i^*$ bij., da nicht-ausg. $\Rightarrow v = 0$.

$U_i \oplus U_i^\perp = V$, da zu $v \in V$: $\beta_q(v, -)$ als Linearform auf U_i sich einschränkt (anders gesagt: $V^* \to U_i^*$ ist surjektiv), aber $U_i \xrightarrow{\sim} U_i^* \Rightarrow \exists u \in U_i$, $\beta_q(v, -) = \beta_q(u, -) \Rightarrow v - u \in U_i^\perp$.

Ist nun $(v_1, \dots, v_k)$ OB von U_1, $(w_1, \dots, w_k)$ OB von U_2, mit $q(v_i) = a_i$, $q(w_i) = b_i$ $\Rightarrow$ $[a_1, \dots, a_k] \underset{(*)}{\cong} [b_1, \dots, b_k]$.

Ergänze (v_i) bzw. (w_i) zu OB von V (geht, da $V = U_i \oplus U_i^\perp$!), d.h. $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ OB von $U_1^\perp$, $(w_{k+1}, \dots, w_n)$ OB von $U_2^\perp$, mit $a_i = q(v_i)$, $b_i = q(w_i)$ $(i \geq k+1)$ $\Rightarrow$ $[a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] \cong [b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n]$ und $(*)$ impliziert $[b_{k+1}, \dots, b_n] \cong [a_{k+1}, \dots, a_n]$.

Dies liefert Isom. zwischen $U_1^\perp$ und $U_2^\perp$, die s fortsetzt.

A4) a) z.z.: $[1, -1] \cong \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, vgl. a) von A1

b) $d(q_1) = -1 = d(q_2)$ und wegen obiger Äquivalenz: q_1 und q_2 stellen $\mathbb{R}$ dar.

c) $[1, -1, 1, 1] \not\cong [1, -1, -1, -1]$ nach Sylvester

A1) Gauß.

LA II Blatt 13

A2) a) g selbstad. bzgl. Skalarpr. $\overset{\text{Spektral-}}{\underset{\text{satz}}{\Rightarrow}}$ g diagbar.
Sei f nun diagbar bzgl. einer Basis (v_i) von V, und sei $\langle -,- \rangle$ bzgl. dieser Basis durch $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ def.
$\Rightarrow \langle f(v), w \rangle = w^t A v = w^t A^t v = (Aw)^t \cdot I_n \cdot v = \langle v, f(w) \rangle$, wenn A die Darstmatrix von f bzgl. (v_i) ist $\left(A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\right)$.

b) $U \leq V$, sei W ein Komplement, d.h. $V = U \oplus W$, $W = U^\perp$.
$f: V \to U$ Proj. bzgl. einer gewählten ~~Basis~~ ONB von U und W, hat f also die Darstmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt $A = A^t$ und man hat EW $0, 1$, sowie Eigenräume $U, U^\perp$.

A3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Sei $L = \begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$. $LL^t = A$ gilt genau dann, wenn $\alpha^2 = a$, $\alpha\gamma = b$, $\gamma^2 + \beta^2 = c$. Nun ist $a > 0$, da $(1,0) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a > 0$. $\Rightarrow \alpha = \sqrt{a} > 0 \Rightarrow \gamma = \frac{b}{\sqrt{a}}$, $\beta = \sqrt{c - \gamma^2} = \sqrt{c - \frac{b^2}{a}} > 0$, da $\det A > 0$, $\det A = ac - b^2 > 0$, d.h. $c - \frac{b^2}{a} > 0$, da $a > 0$. "Cholesky-Zerlegung".

A4) $A^m = 0$, $\exists S \in Gl_n: S^{-1}AS = T = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow$
$T^k = (S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS \Rightarrow T^m = 0$, d.h. $a_i^m = 0 \Rightarrow a_i = 0$.
Über $\mathbb{C}$ ist folgende Matrix ein Gegenbsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
A symmetrisch, $A^2 = 0$, aber $A \neq 0$.

A1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ A hat EW 3 (doppelte Vielfachheit) und -2
mit EV $(-2, 0, 1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,2)$. Normalisieren $\Rightarrow$ ONB.
B hat EW 17 und -4